Z2576 – 1er. recuperatorio 2do. Parcial – 2do. Cuatrimestre 2024

E1) Calcular el flujo del campo $\overline{f}(x,y,z) = (z^3 - x\ ,\ z^3 - y\ ,x^2 y)$ a través de la superficie frontera del cuerpo limitado por las superficies $6x + 4y + z = 12\ ,\ x^2 + z^2 = z$, con $y \geq 0$. Indicar gráficamente cómo ha orientado la superficie.

E2) Calcular el flujo del campo vectorial $\overline{f}(x,y,z) = (x\ ,y\ ,\ x + y + z)$ a través de la superficie S, de ecuación $y = x^2$ con $y + z \leq 1$; primer octante. Indicar claramente en un gráfico la orientación elegida para la superficie.

E3) Dado el campo vectorial $\overline{f}(x,y) = (2xy\ ,\ x^2)$

a) Hallar, si existe, la función potencial de $\overline{f}$; o caso contrario justificar que no existe.

b) Calcular la circulación de $\overline{f}$ a lo largo de la curva C dada por $y = x^3$ entre los puntos (2 , 8) y (-1 , -1) utilizando dos métodos distintos.

E4) a) Hallar la solución general de la ecuación diferencial $y'' - 4y = -2$

b) Dada la integral $\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{2-x^2}} dy$, graficar la región de integración y plantear la integral en coordenadas polares (no es necesario resolver la integral).

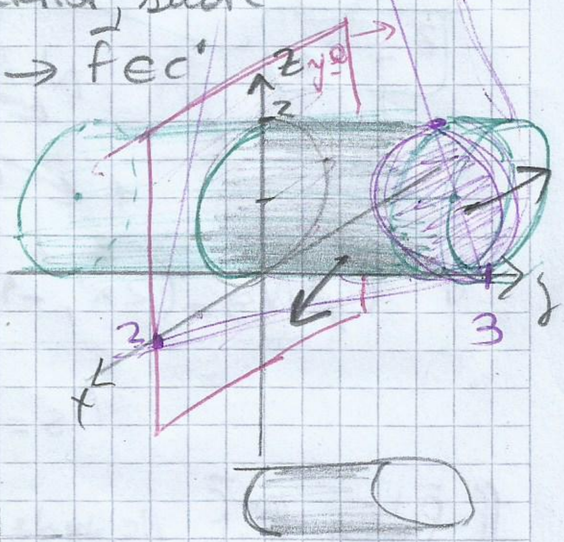
AM 2	2° parcial 1° recup Prof. Campello	HOJA N° 1/2 FECHA 2°C 2024

E1 Calcular el flujo del campo $\bar{F}(x,y,z) = (z^3 - x, z^3 - y, x^2 y)$ a través de la sup. frontera del cuerpo limitado por las sup. $6x + 4y + z = 12$, $x^2 + z^2 = z$, con $y \geq 0$ - Indicar, gráficamente como orientó la superficie

Sea S una sup frontera de W ⟶ W es una región de $\mathbb{R}^3$
↳ orientada al exterior, suave

$\bar{F}$ tiene componentes polinómicas → $\bar{F} \in C^1$

$$\Rightarrow \oint\!\!\oint_S \bar{F} d\bar{s} = \iiint_W \operatorname{div}(\bar{F})\, d\text{vol}$$



$x^2 + z^2 = z \rightarrow x^2 + z^2 - z + 1 - 1 = 0$

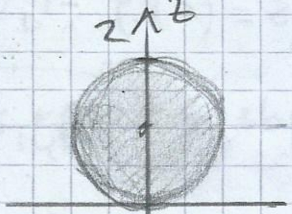
$$\boxed{x^2 + (z-1)^2 = 1}$$

cilindro corrido

$0 \leq r \leq 1$

$0 \leq t \leq 2\pi$

$$\begin{cases} x = r\cos(t) \\ y = y \\ z = r\,\text{sen}(t) + 1 \end{cases}$$



$0 \leq y$

$6x + 4y + z = 12 \rightarrow 4y = 12 - 6x - z \rightarrow y = \dfrac{12 - 6x - z}{4}$

$$0 \leq y \leq \frac{12 - 6r\cos(t) - r\,\text{sen}(t)}{4}$$

$\operatorname{div}(\bar{F}) = -1 - 1 = -2$

$$\oint\!\!\oint_S \bar{F} d\bar{s} = \iiint_W -2\, d\text{vol} \overset{C.V}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{\frac{12 - 6r\cos(t) - r\,\text{sen}(t)}{4}} r \; dz\, dr\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 r \cdot \frac{(12 - 6r\cos(t) - r\,\text{sen}(t))}{4}\, dr\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{12}{4} r\, dr\, dt - \underbrace{\frac{6}{4}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\cos(t)\, dr\, dt}_{0} - \underbrace{\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\,\text{sen}(t)\, dr\, dt}_{0} =$$

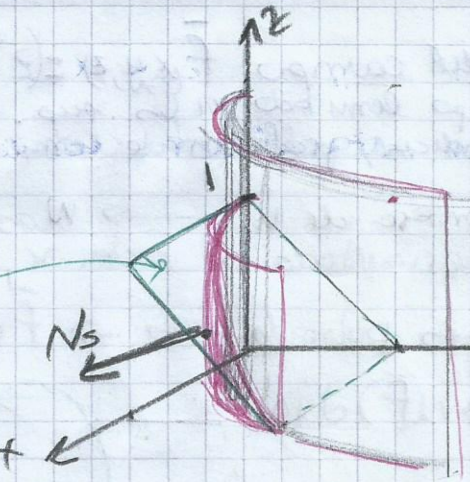
$$= 3\int_0^{2\pi} dt \int_0^1 r\, dr = 3 \times 2\pi \cdot \frac{r^2}{2}\Big|_0^1 = \boxed{3\pi = \oint\!\!\oint_S \bar{F} d\bar{s}}$$

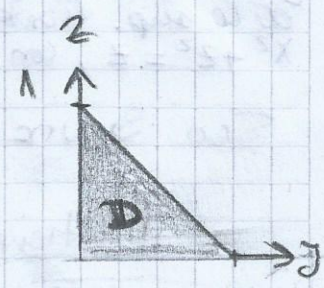
NOTA

E2 Calcular el flujo del campo vectorial $\bar{F}(x,y,z)=(x,y,x+y+z)$ a través de la sup S, de ecuación $y=x^2$ con $y+z\le 1$, primer octante. Indicar orientación

$$S:\begin{cases} y=x^2 \\ y+z\le 1 \\ 1^{\circ}\text{ octante}\end{cases}$$

$\boxed{z\le 1-y}$





$0\le y\le 1$

$0\le z\le 1-y$

$x^2-y=0$

$y=x^2$

$\hookrightarrow \boxed{N_S=(2x,-1,0)}$

$y=x^2 \rightarrow x\overset{y\geq 0}{=}\sqrt{y}$

$$N_S=(2\sqrt{y},-1,0)$$

$$\iint_S \bar{F}\,d\bar{S}=\iint_{\underset{S_{yz}}{D}} \bar{F}\; N_S\,dy\,dz=\iint_D \overbrace{(x,y,x+y+z)}^{x=\sqrt{y}}\,(2\sqrt{y},-1,0)\,dy\,dz=$$

$$=\iint_D \sqrt{y}\cdot 2\sqrt{y}+y(-1)+(\sqrt{y}+y+z)\cdot 0\;dy\,dz=$$

$$=\iint_D \overbrace{2y-y}^{y}\,dy\,dz=\int_0^1\int_0^{1-y} y\;dz\,dy=$$

$$=\int_0^1 y(1-y)\,dy=\int_0^1 y-y^2\,dy=\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

$$\boxed{\iint_S \bar{F}\,d\bar{S}=1/6}$$

NOTA

AM2	2° parcial 1° recup	Prof. Carrapallo	HOJA N° 2/2 FECHA 2°C 2024

E3 Dado el campo vectorial $\bar{f}_{(x,y)} = (2xy, x^2)$

a) Hallar, si $\exists$, la función potencial de $\bar{f}$. Caso contrario justificar que $\nexists$

$\bar{f}$ tiene componentes polinómicos $\rightarrow \bar{f} \in C^1$ ✓ $\quad \bar{f} = (P, Q)$

Analizo si tiene matriz jac. simétrica. $P'_y = Q'_x$

$$\left.\begin{array}{l} P = 2xy \rightarrow P'_y = 2x \\ Q = x^2 \rightarrow Q'_x = 2x \end{array}\right\} = ✓ \quad \bar{f} \text{ admite función potencial}$$

$$\Rightarrow \exists \varphi \,/\, \bar{f} = \nabla\varphi \rightarrow (2xy, x^2) = (\varphi'_x, \varphi'_y)$$

$$\begin{cases} \varphi'_x = 2xy \xrightarrow[\text{en } x]{\text{integro}} \varphi_{(x,y)} = x^2y + \alpha(y) \\ \varphi'_y = x^2 \quad \text{I} \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \varphi'_y = x^2 + \alpha'_{(y)} \underset{\text{I}}{=} x^2 \rightarrow \underbrace{\alpha'_{(y)} = 0}_{\alpha(y) = C}$$

$$\boxed{\varphi_{(x,y)} = x^2y + C}$$

b) Calcular la circ. de $\bar{f}$ a lo largo de la curva dada por $y = x^3$ entre los puntos $(2,8)$ y $(-1,-1)$ utilizando dos métodos $\neq$

1) $$\int_C \bar{f}\,d\bar{l} = \int_A^B \nabla\varphi = \varphi_{(B)} - \varphi_{(A)} = (-1)^2(-1) + \cancel{C} - 2^2 \cdot 8 - \cancel{C} =$$

$A = (2,8)$
$B = (-1,-1)$

$$= -1 - 32 = \boxed{-33 = \int_C \bar{f}\,d\bar{l}}$$

$$C: y = x^3 \rightarrow \bar{\gamma}_{(t)} = (t, t^3) \qquad A = \bar{\gamma}_{(2)} \qquad \bar{\gamma}'_{(t)} = (1, 3t^2)$$

$$\underbrace{t \in [-1, 2]}_{} \qquad B = \bar{\gamma}_{(-1)}$$

con este intervalo la curva se recorre de B a A

$$\int_C \bar{f}\,d\bar{l} = -\int_{-1}^{2} f(\bar{\gamma}_{(t)})\,\bar{\gamma}'_{(t)}\,dt = \int_2^{-1} f(\bar{\gamma}_{(t)}) \cdot \bar{\gamma}'_{(t)}\,dt =$$

$$= \int_2^{-1} (2t\,t^3, t^2)(1, 3t^2)\,dt = \int_2^{-1} 2t^4 + 3t^4\,dt =$$

$$= \int_2^{-1} 5t^4\,dt = \frac{\cancel{5}t^5}{\cancel{5}}\Big|_2^{-1} = -1^5 - 2^5 = -1 - 32$$

$$\boxed{\int_C \bar{f}\,d\bar{l} = -33}$$

NOTA

E4 a) Hallar la solución general de la ec dif $y''-4y=-2$

SH) $y''-4y=0$

$r^2-4=0 \to r_1=2,\ r_2=-2$

$$\boxed{y_H = Ae^{2x}+Be^{-2x}} \quad A,B\in\mathbb{R}$$

SP) $y_P = C \to y'=0=y''$

$0-4C=-2 \to C=\frac{1}{2}$ $\qquad \boxed{y_P=\frac{1}{2}}$

$$\boxed{y_G = y_H+y_P = Ae^{2x}+Be^{-2x}+\frac{1}{2}}$$

b) Dada la integral $\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{2-x^2}} dy$ graficar la región de integración y plantear la integral en coord polares

$\boxed{0\le x\le 1}$

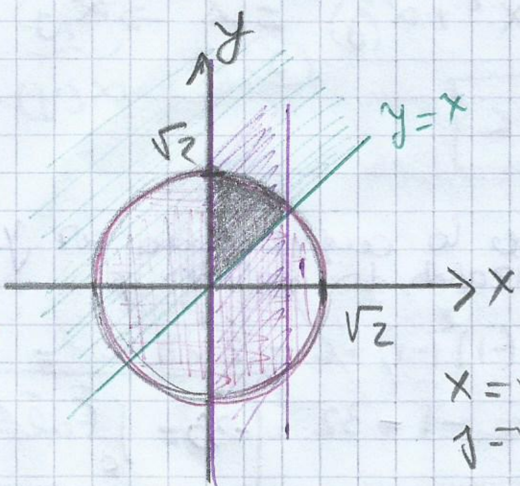
$x\le y\le \sqrt{2-x^2}$

$x\le y$

$y\le\sqrt{2-x^2}$ $\qquad y\ge 0$

$y^2\le 2-x^2$

$\boxed{x^2+y^2\le 2}$



$x=r\cos(t)$ $\qquad 0\le r\le\sqrt{2}$

$y=r\sin(t)$ $\qquad \frac{\pi}{4}\le t\le\frac{\pi}{2}$

$$\boxed{\int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{2-x^2}} dy \overset{cv}{=} \int_{\pi/4}^{\pi/4}\int_0^{\sqrt{2}} r\ dr\,dt}$$

NOTA